Menge R der reellen Zahlen

 **Die Menge R der reellen Zahlen**

Als Menge „aller Zahlen“ haben wir bisher die Menge Q der rationalen Zahlen verstanden. Die Menge Q ist definiert als "Menge aller Zahlen, die sich als Bruch schreiben lassen".

Beim Berechnen von Wurzeln sind aber zwei Fälle zu unterscheiden:

* Der Radikand ist eine so genannte Quadratzahl (z.B.  ;  ; ; ...). Da eine Quadratzahl durch Quadrieren einer rationalen Zahl entsteht, liefert deren Wurzel wieder die ursprüngliche rationale Zahl.
* Der Radikand ist keine Quadratzahl (z.B. ): In diesem Fall lässt sich beweisen, dass die Wurzel nicht als Bruch geschrieben werden kann und somit keine rationale Zahl ist (siehe unten)!

In der Menge Q sind also nicht alle Zahlen enthalten; daher muss diese Zahlenmenge erweitert werden:

**Definition:** Zahlen, die nicht als Bruch geschrieben werden können, heißen **irrationale Zahlen**. Sie bilden zusammen mit den rationalen Zahlen Q die neue **Menge R der reellen Zahlen.**Für die Zahlenmengen gilt: **N**  **Z**  **Q** und **Q {irrationale Zahlen} = R**

**So lässt sich beweisen, dass** $\sqrt{2}$ **keine rationale Zahl ist:**

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, muss sie sich als Bruch schreiben lassen und dieser Bruch muss soweit wie
möglich gekürzt werden können. Dann gilt: $\sqrt{2}= \frac{a}{b}$und zwar so, dass a und b "teilerfremd" sind. Nun werden

beide Seiten der Gleichung quadriert: $\sqrt{2}^{2}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2}$ 🡪 $2=\frac{a^{2}}{b^{2}}$ 🡪 $2b^{2}=a^{2}$

Die Zahl 2b2 ist eine gerade Zahl. Dann muss auch a2 und damit auch a eine gerade Zahl sein, also kann die Zahl ain der Form 2x dargestellt werden. Setzt man a = 2x ein, erhält man:

*2b2 = (2x)2* 🡪 *2b2 = 4x2* 🡪 *b2 = 2x2* 🡪 Also ist auch b² und damit auch b eine gerade Zahl.

Sind a und b aber beide gerade Zahlen, dann könnte man sie mit 2 kürzen, also sind sie nicht teilerfremd. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.